数理解析研究所講究録
1513巻 2006年 104-111



# 関孝和の天文暦学研究

杉本敏夫 (Sugimoto Toshio)

## 第1節 序

関孝和の広範な研究分野のうち、天文暦学研究について概観せよとの主催者の要請に応えるため、私の旧稿〔1〕、〔2〕を基に特色のある話題を取り上げた。〔3〕「関孝和全集」に盛られた天文暦学研究関係の概観は、〔3〕の解説編の〔4〕広瀬論文に譲り、「授時発明」、「半日周弧」、「磁針の偏り」の三つの話題に絞ることにする。付録として中国・日本の天文暦学の理解に必要な事項を掲げた。

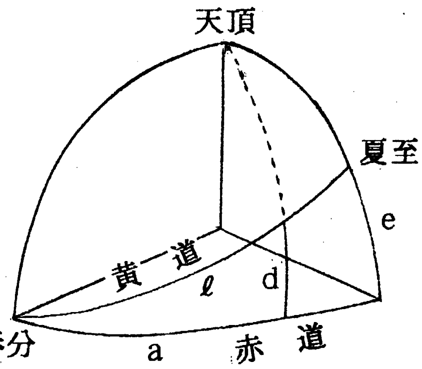
## 第2節 改暦の機運

平安初期、中国暦に基づく宣明暦（貞観4、862年）は約800年も続いたため、季節より約2日間の遅れが生じ、日・月蝕の予報も外れた。改暦の機運はあっても、それを実現できる政権がないまま放置された。江戸期になって、ようやく機は熟した。模範となったのが中国元代の授時暦（1281年）であるが、数理の理解に高度の数学的素養を必要とした。関孝和は完全に理解し、改暦の準備を進めたが、実現しなかった。渋川春海の改暦は幕閣の支持を得、京都の陰陽家とも通じたため、五代将軍綱吉のとき貞享暦（1685年）の頒布に結実した。関は渋川よりも遙に数理に明るかったが、政治的な背景の欠如のため敗れたと言う。以上は〔4〕広瀬論文および〔5〕中山茂著を参照して、要点を記した。

## 第3節 黄赤変換

授時暦は、郭守敬率いる元の太史院が総力を挙げて作成し、天文観測に基づき、新しい計算法を採用し、画期的な暦であった（〔6〕山田著）。その数理的内容を解説したのが「天文大成管窺輯要」（明末1652）であり、関孝和の授時発明(1680)はうち黄赤変換と白道（月の軌道）解析の部分を図解・注釈し、計算を試みたものである。

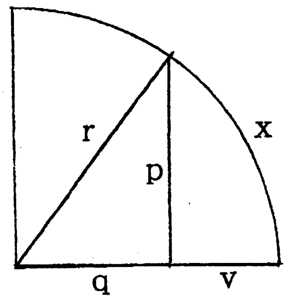
中国暦は冬至を起点とし、天の南極側から見上げた図解が必要であるが、考えにくい。本稿では常識的な北極を上とする図に改め、起点を春分とし、必要な改変を施した。




太陽は黄道上を 365.25 日かけて一周する。中国では円周を 365.25 等分して度と称する。ここでは仮に中国度と呼び、記号 # で示す。黄道は赤道と一定の傾斜 $e=23.9^{\#}$ ををもっている。黄赤変換とは太陽の位置（黄経）$\ell$ を赤道座標すなわち赤経 a，赤緯 d に変換することが主要な問題となる。この変換は三つの段階を含む。すなわち

(1)　　半弧 $\ell$, e　$-①\rightarrow$　半弦　$-②\rightarrow$　半弦　$-③\rightarrow$　半弧 a, d

なる変換過程のうち、②は直線の立体幾何であり、勾股弦の定理の組み合わせで解ける。しかし①の段階では正弦・余弦関数、③の段階では逆正弦・逆余弦関数に相当する変換が必要となる。授時暦は③で、北宋の沈括が「会円術」（11世紀）と称して提案した、半径 $r=91.3125^{\#}$ の下、半弦 p と矢 v から半弧 x を与える近似公式：




(2)　　$x=p+v^2/2r \quad (v=r-q)$

を用いた。①の段階では、式(2)を逆に解くため、r，x を係数にもつ所の、矢 v についての四次方程式：

(3)　　$v^4+(4r^2-4rx)v^2-8r^3v+4r^2x^2=0$

を逐次近似法で解いた。授時暦では、中国度刻みの x に対応する p の数表が作られていて、与えられた x には近い p を選び、$v=\sqrt{2r(x-p)}$ を第一近似としたと思われる。

関がこの関係式を完全に理解したことは、彼の「授時発明」に反映している。

## 第4節　周径率3

本節の内容は、関よりも授時暦を作った郭守敬の《三角関数》に係わる。沈括の公式(2)と(3)は周径率として古率3なる定数を用いた。円周率 $\pi$ (=3.1416) と区別のため $\omega=3$ と置く。例えば〔6〕銭宝琮は、「沈括の弧矢公式は誤差が可なり大きく、また $\pi=3$ で計算したため、求めた周天直径は不正確で、その（全体の）結果も正確でない。」と言う。〔4〕広瀬も「沈括の公式は現在から見れば正しくない。…孝和は $\pi=3$ という原始的な値を使っている。…孝和は一応元代の値で授時発明の説明を行ない、其の後、括要算法の $\pi$ の値（$\pi$ の値としても画期的なもの）に到達したのであろう。」と言う。周知のように、関は〔3〕「求円周率術」で、径1尺の円周 3尺14159265359微弱 に到達した。

私はこれらの通説について疑問をもち、まず$91.3125^{\#}$ を $90°$ に換算し、かつ

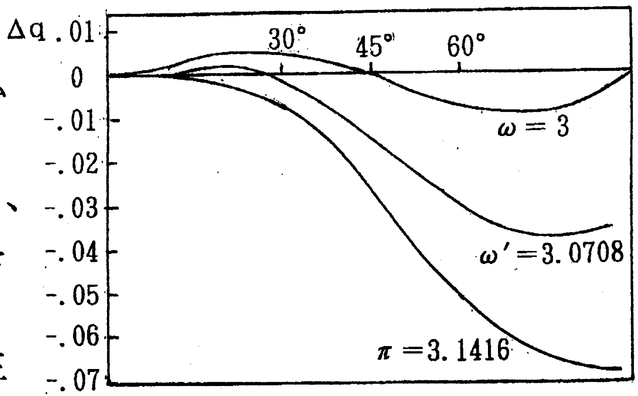
(4)　　$\omega=3,\ \omega'=3.0708,\ \pi=3.1416$

なる三つの仮定の下に、沈括の公式(3)を用いた《余弦》 q と西洋流 cosine との誤差 $\Delta q$

を求めた。パリのマルツロフが〔8〕「中算史導論」の中で引用した図を、私は原論文に基づいて正した。この図は

「沈括の公式(2)または(3)を用いる限り、正確な$\pi=3.1416$よりも古率$\omega=3$を用いるほうが誤差が小さい！」

という**意外な結論**を示す。恐らく郭は正確な$\pi$の値を知りながら、経験的にこの結論に基づいて計算したのだ。銭や広瀬は、なまじ西洋数学の素養のために見逃した。私の結果(1983)はローカルな雑誌「明治学院論叢」の論文〔1〕に載せたので知られていない。




近似の程度の比較のため、半弦と半弧を予め半径r＝91.3125で割って規準化したxとpに直しておき、沈括の公式(2)と(3)によるxとp，対応する西洋度と正弦を掲げる。

| x | p | degr. | sine | x | p | degr. | sine | x | p | degr. | sine |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.1000 | 6 | 0.10453 | 0.6 | 0.5825 | 36 | 0.58779 | 1.1 | 0.9180 | 66 | 0.91355 |
| 0.2 | 0.1998 | 12 | 0.20791 | 0.7 | 0.6674 | 42 | 0.66913 | 1.2 | 0.9543 | 72 | 0.95106 |
| 0.25 | 0.2495 | 15 | 0.25882 | 0.75 | 0.7071 | 45 | 0.70711 | 1.25 | 0.9684 | 75 | 0.96593 |
| 0.3 | 0.2990 | 18 | 0.30902 | 0.8 | 0.7447 | 48 | 0.74314 | 1.3 | 0.9798 | 78 | 0.97815 |
| 0.4 | 0.3966 | 24 | 0.40674 | 0.9 | 0.8128 | 54 | 0.80902 | 1.4 | 0.9950 | 84 | 0.99452 |
| 0.5 | 0.4917 | 30 | 0.50000 | 1.0 | 0.8708 | 60 | 0.86603 | 1.5 | 1.0000 | 90 | 1.00000 |

x＝0, degr.＝0°；x＝0.75, degr.＝45°；x＝1.5, degr.＝90° の三点で一致し、中間のx＝0.25〜0.5, degr.＝15°〜30°の区間でやや不一致。また正弦と余弦の相補関係

(5)　$\cos u^\circ = \sin(90^\circ - u^\circ)$

に対応し、中国流《正弦》pと《余弦》qの間にも同様な相補関係

(6)　$q(x) = p(1.5 - x)$

が成立する。《正弦》の二倍角公式を試してみよう。

$18^\circ \times 2 = 36^\circ$: $2\times p(0.3)\times q(0.3) = 2\times 0.2990\times 0.9543 = 0.5707 \longleftrightarrow p(0.6) = 0.5825$,

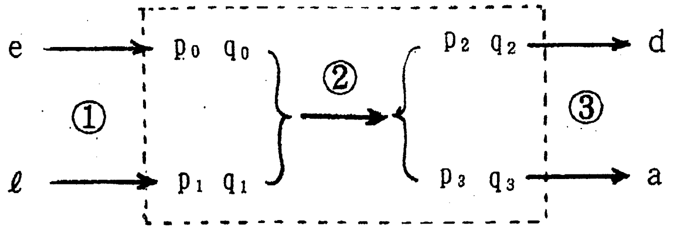
$36^\circ \times 2 = 72^\circ$: $2\times p(0.6)\times q(0.6) = 2\times 0.5825\times 0.8128 = 0.9469 \longleftrightarrow p(1.2) = 0.9543$.

$\omega=3$が良いのは不思議だ、という疑問に対して一言補おう。西洋流の弧度法は弧長と直径を同じ単位で測る。それは数学史でも微積分以後に属する。長い数学史の中では様々な測り方があった。西洋度でも円周を360等分し、直径を100等分すれば周径率は3.6となる。中国度は円周を365.25等分し、直径を121.75等分したから、周径率は3となった。「曲がった長さをどう測るか」とか「角度とは何か」と考えれば、考え方の多様性は不思

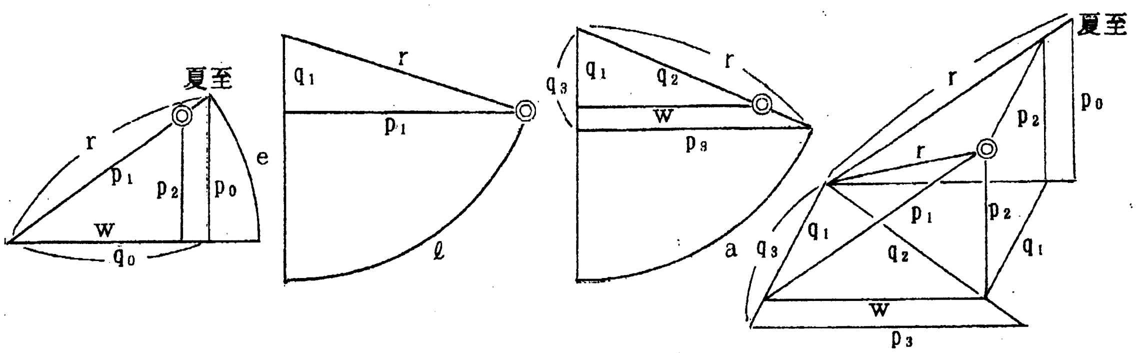
議ではない。「曲線と直線の長さを別々の単位で測っても、対応関係をうまく定めれば実用上は差しえない」と考え直せば、郭守敬の計算体系はそれなりに整合性をもっていた。

## 第5節　線分相互の変換

第3節の黄赤変換の式(1)を、中国流《正弦》pと《余弦》qも含めて図式

(6)



のように描き直せば、①と③の所で中国流算法（前節）が用いられた。②の所は線分相互の変換（直線の立体幾何）であって、$p_0, q_0$；$p_1, q_1$ から $p_2, q_2$；$p_3, q_3$ を求める。次は三つの部分図と諸関係の立体図に分けた。◎は太陽の位置。




夏至の経面　　黄道面　　赤道面　　諸関係の立体図

これを変換式に直せば、そこには

$$
(7)\quad \begin{cases} \text{(i)}\ p_2=(p_0/r)p_1\ ;\quad \text{(ii)}\ w=(p_0/r)q_0\ ;\quad \text{(iii)}\ q_2=\sqrt{w^2+q_1^2}\ ; \\ \text{(iv)}\ p_3=(r/q_2)w\ ;\quad \text{(v)}\ q_3=(r/q_2)q_1\ . \end{cases}
$$

なる変換が含まれる。

これを用いた例題を挙げる。関の授時発明は冬至が起点であり、上図で四分円からℓを引いた値に相当する半弧から出発し、変換式は(7)とは異なる。ここでは上図に置き換え、変換式(7)を用いる。関の例題は彼の図の $\ell=45^{\#}$ から出発するので上図の 91.3125－45＝46.3125 がℓに相当する。私の検算によれば次の通り。[　]内は関の計算結果。

$e=23.9 \rightarrow p_0=23.7109$[23.713], $q_0=56.06775$[56.065];

$\ell=46.3125 \rightarrow p_1=43.54970$, $q_1=42.53457$; $w=40.11061$[40.09];

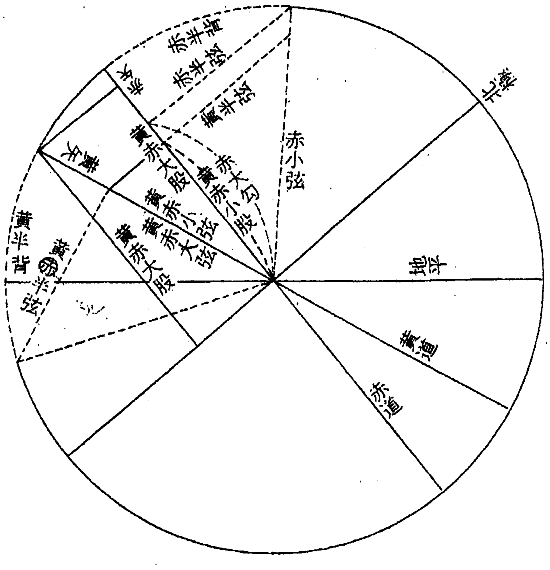
$p_2=16.96216$[16.9623], $q_2=58.46410$[58.453]$\rightarrow$ $d=17.00990$ [17.0105];

$p_3=41.76466$, $q_3=44.28858 \rightarrow a=44.02428$.

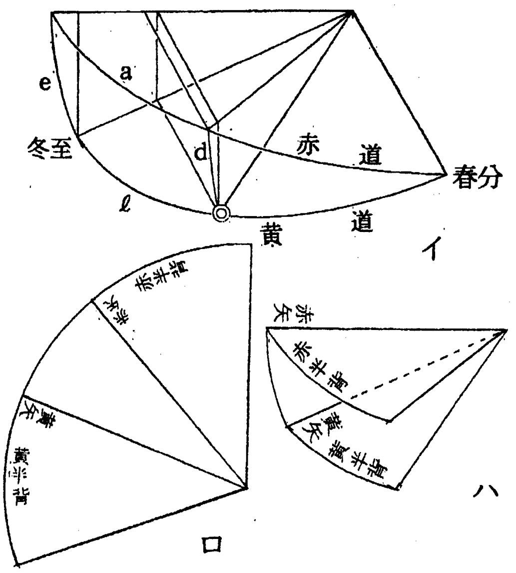
関のaは「四分円ﾏｲﾅｽa」に相当するから 91.3125－44.02428＝47.28822[47.3085].

[ ]内の関の値を見ると、誤差を含む。その原因は関が計算の途中で意外に少ない桁数で丸めたことによる。恐らく授時発明は、授時暦の数理の解明が主題であったので、細かい点には拘らなかったのであろう。なお〔4〕広瀬は「発明」とは解明の意と言う。

関が描いた〔3〕「授時発明」381頁の図を、私が描いたイ図（第3節の天球を90度右に回転させて冬至が左下に来る）と並べて示す。関の図の赤半背がaに、黄半背が$\ell$に、赤矢・黄矢中間の半背が黄道傾斜eに相当する。いまa－e－$\ell$を連ねた円弧の両端を中心と結んだ扇形を切り抜き（ロ）、ハ図の如く折り曲げた立体を作れば、イ図の一部になる。関は左図の中に多くの線分(例えば赤半弦$p_3$)を書き込んで考察を進めた。立体のイ図に比べれば、線分相互の関係をよくぞ混乱なく処理したものだ、と感心させられる。




図云、以朱見経、以墨見緯（編者曰、朱は点線で描く、以下同じ）




**第6節　現代の計算との比較**

沈括の公式を用いた誤差は上で述べた。しかし黄赤変換に適用したときは、意外なことに三角関数を用いる現代の天文計算、すなわち第3節の図への球面三角法の適用

(8)　$\sin d = \sin \ell \cdot \sin e$,

(9)　$\tan a = \tan \ell \cdot \cos e$.

に匹敵する。簡単のため、中国度と西洋度の換算率を 365.25/360＝1.014583 と置く。

$e = 23.9^{\#} = 23.9/1.014583 = 23.55647^\circ$,　$\ell = (91.3125-45)/1.014583 = 45.64682^\circ$,

$\sin d = \sin 45.64682^\circ \times \sin 23.55647^\circ = 0.71504 \times 0.39965 = 0.28577$,

$\arcsin 0.28577 = 16.60484^\circ$,　$16.60484 \times 1.014583 = \underline{16.8470^{\#} = d}$;

$\tan a = \tan 45.64682^\circ \times \cos 23.55647^\circ = 1.02284 \times 0.91667 = 0.93760$,

$\arctan 0.93760 = 43.15545^\circ = (a)$,　$91.3125 - 43.15545 \times 1.014583 = \underline{47.52770^{\#} = a}$.

前節の関自身による計算結果<u>d＝17.0105,</u>　<u>関のa＝47.3085</u> を、この球面三角法による

結果と比較すれば意外に良い値と言える。私は詳しい分析（詳細は省略する）により、〔6〕銭や〔4〕広瀬の見解とは**異なる結論**「古率三と沈括の公式を組み合わせた算法は、巧みに誤差を相殺し、それ自身として一貫性をもつ優れた算法となる」を得たのである。

## 第7節　半日周弧

〔10〕第九冊の「元史暦志四」には「半昼夜分」（半日周弧）の表が載っている。これは季節ごとの昼の長さ、夜の長さのそれぞれ半分 t/2, s/2 の値を表す。関は〔3〕「授時暦経立成」の中に、これに相当する数表を掲げた。立成とは予め作っておけば計算が立ち所に成ると言う意味で、数表のことを言う。元史暦志の場合は、大都（北京）の北極の高さ40度太強を基準にした。関は〔3〕「天文数学雑著」の中の「日景実測」で、武州江戸で冬至と夏至の正午の影の長さを実測した。これを基にして、江戸の緯度 36.5994#, 黄道傾斜 e ＝23.9006# などを得ている。当該の長さを得るためには、黄径 ℓ から赤緯 d への換算（元史暦志四に掲載）と、d から t/2 の計算の二つの計算が必要になる。後者の計算のために、関は有効な略算式まで作った。私は関が全てを自身で計算し直したものと信じて、種々の検算を試みた。しかしどうしても彼の立成の値には到達しない。試みの末、最後に明らかになったのは、またもや**意外な結論**であった。すなわち

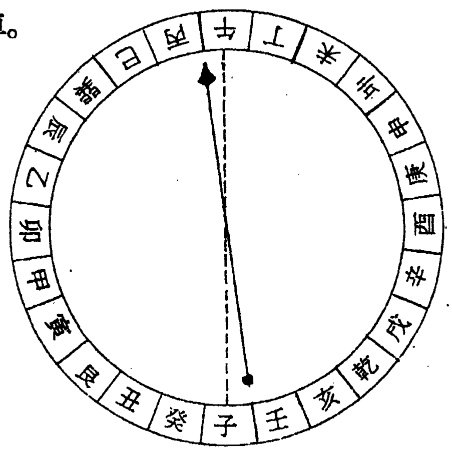
「関は黄径 ℓ から赤緯 d への計算には、元史暦志の値をそのまま使った。彼が新たに計算したのは d から t/2 を求める部分であった。」

この理由を私は考えてみた。元史暦志の中の数表の作成には、膨大な量の計算が必要である。元の太史院には大勢の天文官がいて、郭守敬の統率の下に計算を実行した。（その元史暦志の数表の中に、私は何箇所もの誤りを発見した。）この数表は中国度刻みであり、端数は補間計算を必要とする。半昼夜分の基礎になるのは、元史暦志四の「内外度」の表、すなわち黄径 ℓ から赤緯 d への変換表である。関の場合を考えてみよう。彼は孤軍奮闘、全て自身の手計算である。膨大な量の計算は、元史暦志に依存せざるを得なかった！

私の援軍はHewlett PackardのProgram関数電卓。

## 第8節　磁針の偏り

関の〔3〕「天文数学雑著」で今一つ注目すべきは「慈鍼之測験」で、磁針が真南を指さず東に偏って丙午の交を指す事実の指摘である。円周の1/48, 西洋度 7°30′の偏り、針の長さ 1 に対し0.130526強の偏りと言う。




慈鍼之測験

〔4〕広瀬は「6, 7桁の精度で sin 7°30′が正しく計算できた」と高く評価し、〔9〕平山諦は「この正弦の値は恐らく孝和自身の計算で、これには円周率10桁を必要とする」と、恰も西洋流の正弦表を計算したかの如き評価を与える。両碩学は贔屓の引き倒しか？

〔3〕関の「角術」は正多角形論である。詳細は別の機会に譲り、磁針の偏りのみ補充する。角術は外接正多角形の一辺を１として、径 Rを求める。十二角は $-1+4R^2-R^4=0$ を解き $R=1.931851652$微(微は6に相当)を得た。これから $1/(2R)=0.258819045=\sin 15°$ が出る。関は角術の中で二倍角公式 $2\cdot\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$ を用いた。$x=7°30'$, $\sin x=y$, $4y^2(1-y^2)=(\sin 15°)^2$ と置いて（「角術」の開方算式の枠内で）解けば、$y=\sin 7°30'=0.130526192$ を得る。私は、磁針の偏りに関しては、関がこのように計算したであろうと推測する。勿論 sin 7°30′の値が精密に求まったからと言って、直ちに関が西洋流の正弦表にまで到達したとは考えにくい。もしもそのような数表が作られたならば、どこかに痕跡が残っている筈だと思うが。

和算史〔11〕の示す所、八代将軍吉宗により西洋の暦書の禁令が解かれた後、中根元圭による「八線表算法解義」は享保12(1727)の頃の著述であり、360 度を単位とする西洋流の正弦表などの用法が解説された、と言う。関よりも後の時代に属する。

**補足　指南と丙午の交**

ここでは、中算・和算の理解に必須な事項を補う。

「天子南面。」を見ても、古代中国から江戸期にかけて南が基準である。磁針も指南。

**十干**、甲かふ、きのえ、乙おつ、きのと、丙へい、ひのえ、丁てい、ひのと、戊ぼ、つちのえ、己き、つちのと、庚かう、かのえ、辛しん、かのと、壬じん、みづのえ、癸き、みづのと。

**十二支**、子し、ね、丑ちう、うし、寅いん、とら、卯ばう、う、辰しん、たつ、巳し、み、午ご、うま、未び、ひつじ、申しん、さる、酉いう、とり、戌じゅつ、いぬ、亥がい、ゐ。

十干・十二支を組み合わせて年号を表す六十進法ができる。甲子が起点で、2乙丑、3丙寅、… と並べる。10番目は癸酉で、11甲戌、12乙亥、… と十二支はズレてゆき、60癸亥の次は元に戻る（還暦）。番号を付けた一覧表を作ると便利で、例えば、壬申の乱(672)は最近の壬申(1992)と60の倍数の差、辛亥革命(1911)は最近の辛亥(1971)と60の差を持つ。

次に**方位**を十二支で表せば（先の図を参照）、子(北)、午(南)、卯(東)、酉(西) はよい。45°方向には、艮こん、うしとら(北東)、 巽そん、たつみ(南東)、坤こん、ひつじさる(南西)、と乾けん、いぬい(北西)を設けた。残りの十二支も図の如く割り振る。更に隙間に甲、乙、丙、丁、庚、辛、壬、癸を当て、二十四方位を表した。丙午の交は午(南)より 7°30′の偏りである。

**補足　中国流の星の名**

古代中国では、月が白道を27.32日で一周するのを 28 日と考え、白道と極く近い黄道上を1日に1宿通るものと考えた。そこで黄道・赤道方面を 28 の不等な部分に分けて、**二十八宿**と称し、各宿の最も西の明るい星に名を与えて、宿の名とした。対応する西洋の星と共に示す。例えば$\alpha$ Virはおとめ座の$\alpha$星(ｽﾋﾟｶ)を指す。

東方：角(かく) $\alpha$ Vir, 亢(かう) $\kappa$ Vir, 氐(てい) $\alpha$ Lib, 房(ばう) $\pi$ Sco, 心(しん) $\sigma$ Sco, 尾(び) $\mu$ Sco, 箕(き) $\gamma$ Sgr ; 北方：斗(と) $\phi$ Sgr, 牛(ぎう) $\beta$ Cap, 女(ぢょ) $\varepsilon$ Aqr, 虚(きょ) $\beta$ Aqr, 危(き) $\alpha$ Aqr, 室(しつ) $\alpha$ Peg, 壁(へき) $\gamma$ Peg ; 西方：奎(けい) $\zeta$ And, 婁(ろう) $\beta$ Ari, 胃(ゐ)35Ari, 昴(ばう)17Tau, 畢(ひつ) $\varepsilon$ Tau, 觜(し) $\phi$ Ori, 参(さん) $\delta$ Ori ; 南方：井(せい) $\mu$ Gem, 鬼(き) $\theta$ Cnc, 柳(りう) $\delta$ Hya, 星(せい) $\alpha$ Hya, 張(ちゃう) $\upsilon$ Hya, 翼(よく) $\alpha$ Crt, 軫(しん) $\gamma$ Crv.　(東北西南の順に並ぶ。)

私達に親しいのは、心＝さそり座のｱﾝﾀﾚｽ、室＝ペガサス座のｱﾝﾄﾞﾛﾒﾀﾞ、昴＝すばる、参＝オリオン座の三星など。和算では十干十二支と並んで宿名が用いられる場合があるので、便宜のため掲げた。例えば、〔3〕関の「角術」の十九角演段においては、線分の長さを平中径に続けて虚、危、室、壁、奎、婁、胃、昴の順に表した。虚から始めた理由は不明。

## 文　献


1. 杉本敏夫：関の授時発明への注意、明治学院論叢第347号、総合科学研究第16号、1-33. 1983年12月。
2. 杉本敏夫：関の授時発明への注意（補）、明治学院論叢第347号、総合科学研究第19号、21-37. 1984年11月。
3. 関孝和著、平山諦・下平和夫・広瀬秀雄編：関孝和全集、大阪教育図書、1974年。「授時発明」377-387, 「授時暦経立成」395-420, 「天文数学雑著」483-508, (慈鍼之測験 487-8, 日景実測 489-90)、「所謂角術」309-342, 「求円周率術」345-352.
4. 広瀬秀雄：関孝和の天文関係の著述、3.「関孝和全集」の後付け 199-216.
5. 中山茂：日本の天文学、岩波書店、岩波新書、1972年。
6. 銭宝琮：中国数学史、科学出版社、1981. 川原秀城訳、みすず書房、1990年。
7. 山田慶児：授時暦の道、みすず書房、1980年。
8. Jean-Claude Martzloff : Histoire des mathématiques chinoises, Masson, 1987. : A history of Chinese mathematics, Springer, 1997. (馬若安: 中算史導論)
9. 平山諦：関孝和－其の業績と伝記－、初版1959, 増補訂正版1974年。
10. 中華書局編輯部編：歴代天文律等志彙編、第九冊、中華書局、1976年。
11. 日本学士院編：明治前日本数学史（全五巻)、日本学術振興会、1960年。「中根元圭」第二巻76-80, 「八線表」第五巻 456-461.